

M-10-17

Задача №4

Вероятность того, что пациент болен равна 20%, т.к. среди обратившихся болела 20% пациентов.

Вероятность того, что он не болен равна $100\% - 20\% = 80\%$.

Вероятность того, что тест покажет положительный результат равна ~~80%~~ сумме вероятностей положительных исходов при болезни и при её отсутствии, т.е.

~~80% * 0,02~~ $0,8 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,95 = 0,206$

Ответ: 0,206.

Задача №3

Посчитаем, сколько золота и алмазов можно по отдельности вынести Мухомору. Золота - 100 кг (уже помещено в сундук, т.к.

76

М-10-17

100 кг · 20 р/кг = 2000 р.

Алмаз: 1 сундук (~~или~~ сундук пачкой
алмазов весит менее 100 кг, потому такое возможно)

40 кг · 60 р/кг = 2400 р.

Тем не менее, очевидно, что если
дополнить половину сундука (пачку
замытого золота) алмазами, или
дополнить 40 кг алмазов золотом, то
МВД сможет выявить фальсификат на большую
сумму денег.

Рассмотрим каждый такой кол-во алмазов
и золота, которое в сумме по объему будет
заминать один сундук, а по массе - 100 кг.

Пусть ~~общая~~ масса алмазов равна x кг, ~~тогда~~ масса
золота $100 - x$ кг.

$$x \cdot 40 + (100 - x) \cdot 20 = 100$$

$$19900 - 160x = 0$$

11-10-17

Пусть объем сундука равен 1; а объем алмазов в сундуке равен x ; тогда

$$x \cdot 40 + (1-x) \cdot 200 = 100$$

$$200 - 160x = 100$$

$$160x = 100$$

$$x = \frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{8} \cdot 40 \cdot 60 + \left(1 - \frac{5}{8}\right) \cdot 20 \cdot 200 = 1500 + 1500 = 3000 \text{ р.}$$

Предположим, что это не оптимальный вариант. И, если ^{Илья} ~~Илья~~ заменит часть алмазов на золото или наоборот, получит наравне драгоценностей на большую сумму денег.

Рассмотрим случай, где Илья заменяет n (объем) алмазов и заменяет на золото

$$n \cdot 40 = 40n \text{ (масса)}$$

$200n$ — цена.

Очевидно, что на место этих алмазов он может положить $40n$ (масса) золота.

6

M-10-17

Теперь рассмотрим обратный случай.
Илья готовит k (массу) золота

объемом $\frac{k}{200}$

Тогда, Илья может заменить их на

$\frac{k}{200}$ алмазов.

$\frac{k}{200} \cdot 40 = \frac{k}{5}$ - масса алмазов

$\frac{k}{5} \cdot 60 = 60 \cdot \frac{k}{5} = 12k$ - цена алмазов. В то время

как ~~масса~~ цена "убранной" золота равна

$20 \cdot k = 20k$. ~~Невыгодно.~~

Т.е. Илье невыгодно менять золото на алмазы
или алмазы на золото при суммарной цене в 3000р.,
значит такой вариант (3000р.) оптимален.

Ответ: 3000р.

M-10-17

Задача №5

Очевидно, что если n кучек 2^n камней (МЕМ) делить без урона игрокам: 2^n на 2^{n-1} и 2^{n-1} , как на 2^{n-2} и 2^{n-2} соответственно и т.д. (при $n \geq 2$, при $n=1$ можно делить 2^1 на 2^0)

Разделим кучку (в 2024 камня) кучку так, что у нее получится несколько кучек в $2^k, 2^k$ и т.д. камней. ($n, k \in \mathbb{N}$)

шаг 0	2024						
шаг 1	1024	1000					
шаг 2		512	488				
шаг 3			256	232			
шаг 4				128	104		
шаг 5					64	40	
шаг 6						32	8

Таким образом, можно угадать шаг в 601 и уже будет верно.

Предположим, что такое решение не оптимально. Очевидно, что одну кучку разбить на 7 можно было за 6 ходов. Впредставим, что кучку можно разбить на 6 вида 2^i (за 5 ходов). Тогда можно комбинировать 2 кучки вида 2^i и 2^k .

М-10-17

Пусть $n > k$ (среди кубов (полученных) нет равных, поэтому кер-ство строим.)

$$\text{Тогда } 2^k = 2^n + 2^k = 2^k (2^{n-k} + 1)$$

$2^k (2^{n-k} + 1)$ имеет степень 2^i , лишь

~~если 2^{n-k} имеет степень 2^i , то $2^{n-k} + 1$ имеет степень 2^i .~~

Если $2^{n-k} + 1$ имеет степень 2^i . Тогда,

$2^{n-k} + 1$ - четное, т.е. 2^{n-k} - нечетное, что невозможно, т.к. $n > k$. Противоречие

Ответ: 60r.

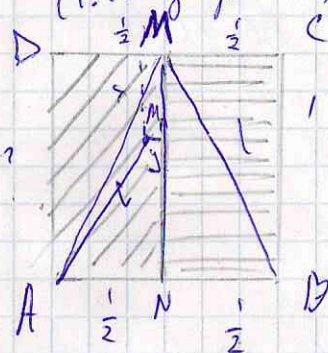
Задача №2

Если 2 из противоположных вершин квадрата 1×1 закрасить в противоположные цвета, то длина такой дуги будет наибольшей среди возможных, т.е. (равна $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$), т.е., ~~вероятно~~ противоположные вершины для минимального наибольшего l будут всегда закрасены в разные цвета.

Радиусы имеют на равные концы или цвета 1 и цвета 2

M-10-17

(i.e. покраши теми цветами.)



//// - цвет 1

==== - цвет 2

В таком случае наибольшей l будет диагональ прямоугольника (проведенный отрезок - средняя линия квадрата).

$$l = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

2) Три точки M влево или вправо (со скоростью $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно) одна из диагоналей будет увеличиваться, в то время как другая - уменьшаться. Точки A и B не могут пересечься (они движутся в противоположные стороны). В $\triangle ADM$ и $\triangle BCM$ ~~AB~~ AM и BM -

самые длинные отрезки (как и DN и CN), т.к. при любой M, меньшей в $\triangle ADM$ ее расстояние до A равно $\frac{1}{2} - x$, (где x - расстояние от D до проекции M на DM, а y - расстояние от N до проекции M на NM)

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + (-y)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - x - 2y + x^2 + y^2} \geq \sqrt{\frac{5}{4}}, \text{ т.к. } x^2 \geq x \text{ (т.к. } x \leq \frac{1}{2})$$

M-10-17

~~Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$~~ Пусть требуется, что M. находится в
ответ 2, тогда, но (2), BM = L

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Задача №1

$$a_n - a_k \geq n^3 - k^3$$

т.к. отношение (неравенство вида $a > b$)

n и k не задано, то, и в обратную сторону,

$a_k - a_n \geq k^3 - n^3$, сложим систему

$$\begin{cases} a_n - a_k \geq n^3 - k^3 \\ a_k - a_n \geq k^3 - n^3 \end{cases}$$

Рассмотрим систему для $n = 1012$ и $k = 1013$.

$$\begin{cases} a_{1012} - a_{1013} \geq 1012^3 - 1013^3 \\ a_{1013} - a_{1012} \geq 1013^3 - 1012^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_{1013} \geq -1012^3 - (1013^2 + 1013 \cdot 1012 + 1012^2) \\ a_{1013} \geq (1013^2 + 1013 \cdot 1012 + 1012^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1013} \leq (1013^2 + 1013 \cdot 1012 + 1012^2) \\ a_{1013} \geq (1013^2 + 1012^2 + 1013 \cdot 1012) \end{cases}, \text{отсюда}$$

М-10-17

~~Задача~~ Рассчитать a_{2024} , рассматривая систему $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 2024$ ~~$n = 1, 2, \dots$~~

$$n = 1012, \quad k = 2024$$

$$\begin{cases} 0 - a_{2024} \geq 1012^3 - 2024^3 \\ a_{2024} - 0 \geq 2024^3 - 1012^3 \end{cases}$$

$$a_{2024} \quad 2024^3 - 1012^3 \leq a_{2024} \leq 2024^3 - 1012^3$$

$$a_{2024} = 1012^3 (2^3 - 1^3) = 1012^3 \cdot 7 = 7255036096$$

Ответ: 7255036096

7