М-8-23

Департамент образования Администрации города
Муниципальное автономное учреждение
«Информационно-методический центр»

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников на территории города Сургута

по ______________________
(ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДМЕТ)

____

«____» «____________» 20___ год

1.

Сумма чётных цифр от 0 до 9 будет $0+2+4+6+8=20$, нечётных – $1+3+5+7+9=25$ в каждом десятке.

~~Эти цифры повторяются в ряде от 0 до~~ ~~99999~~ ~~9999~~ ~~$\frac{10000}{10}=1000$ раз, так как в~~ ~~этом~~ ~~в десятке~~ ~~ряде 10000 чисел, а цифр всего 10.~~

~~Различие в суммах цифр зависит только от различия в суммах последних цифр, так как остальные цифры повторяются по пять раз в каждом десятке.~~

М-8-23

~~Например, если а какая-либо цифра, то 14 а число~~

~~чита~~

~~это~~

Чётность числа определяется последней цифрой.

Ряд от 0 до 9999 можно разделить на десятки, в ~~которых~~ каждом из которых первое число оканчивается 0, а последнее — 9. (Например, 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29)

Каждый из десятков можно разделить на две группы чисел, где в первой — чётные, а во второй — нечётные. В обеих группах будет по 5 чисел (Например, чётные: 20; 22; 24; 26; 28

27

М - 8 - 23

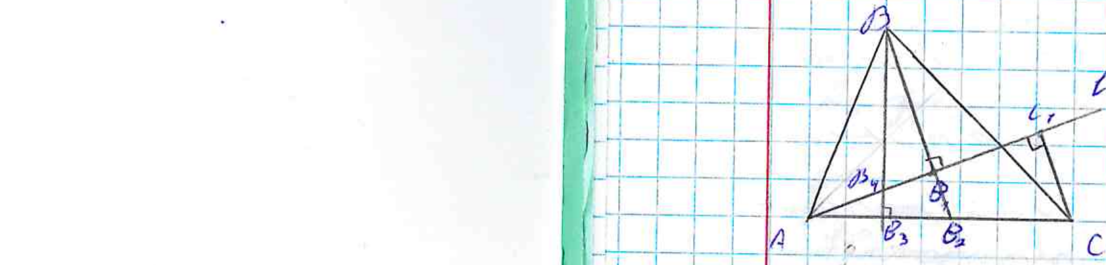
Можно заметить, что сумма цифр, кроме последней, одинакова для обеих групп. Для чётных $2+2+2+2+2=10$ и для нечётных $2+2+2+2+2=10$. Разницу даёт сумма последних цифр, как было выяснено в начале, для ~~неч~~чётных это 20, а для нечетных — 25. Значит, один десяток даёт разницу между нечётными и четными ~~8~~ $25-20=5$, нечётных больше.

Всего десятков в ряду от 0 до 9999, где 10000 чисел, $\frac{10000}{10}=1000$. $1000\cdot5=5000$. При этом, по усл. задачи, ряд ет уго, так как 0 не влияет на сумму цифр, а заканчивается 10000, что сокращает разницу между четными и нечётными до $5000 - (1+0+0+0+0) = 4999$.

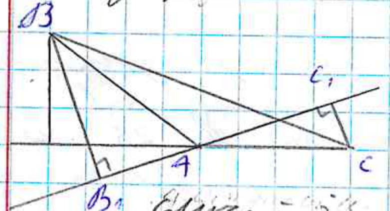
7б

Ответ: сумма цифр в нечетных числах больше на 4999.

2.



случай 1



случай 2

Кратчайший путь от точки до прямой должен быть перпендикуляром прямой, значит $BB_1 \perp l$ и $CC_1 \perp l$. Для ~~остроугольного треугольника~~ случая 1:

Докажем, что если l совпадет с AC, то сумма ~~$BB_1 + CC_1$~~ ~~будет меньше~~ $BB_1 + CC_1$ уменьшится

М-8-23

равно e.
Значит, нужно доказать что
$CC_1 + BB_1 \geq BB_3$.

1) $\angle AC_1C = \angle AB_1B_2 = 90°$, $\angle A$ - общ. $\Rightarrow \triangle AB_1B_2 \sim \triangle AC_1C$ - по двум углам.

2) $\triangle AB_1B_2 \sim \triangle AC_1C \Rightarrow \frac{C_1C}{B_1B_2} = \cancel{\frac{AB_2}{B_1}} = \frac{AC_1}{AB_1}$

3) $C_1C = \frac{AC_1}{AB_1} \cdot B_1B_2$

Так как $AC_1 = AB_1 + B_1C_1$, $AC_1 > AB_1$ и $\frac{AC_1}{AB_1} > 1$, значит $\frac{AC_1}{AB_1} \cdot B_1B_2 = C_1C > B_1B_2$

4) $BB_3 \perp AC$, а BB_2 - нет, значит, $BB_3 < BB_2$

5) $BB_1 + B_1B_2 < BB_1 + C_1C$, так как $B_1B_2 < C_1C$

6) $CC_1 + BB_1 > (BB_1 + B_1B_2 = BB_2) > BB_3$

$CC_1 + BB_1 > BB_3$

Ч.Т.Д.

~~В целом~~ В целом, так как $B_1B_2 \parallel C_1C$,

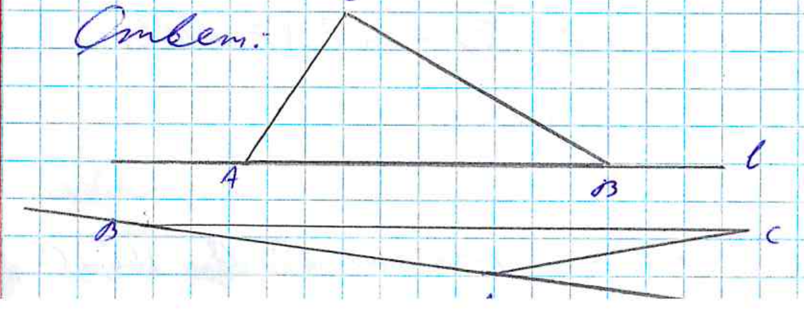
М-8-23

Выгодно уменьшать $\angle C_1AC$, так как C_1C находится дальше от A и будет уменьшаться быстрее, чем падает B_1B_2 и растёт BB_1. ~~Так~~же ~~невыгодно выводить~~ ~~l за угол,~~ ~~ведь в таком случае будет расти и CC_1, и BB_1~~.

Таким образом, если высота, проведённая из точки C <, чем из точки B, следует l провести через AB, в противном случае — через AC.

3б Для случая 2 верна та же „стратегия".

Ответ:



?

М-8-23

Департамент образования Администрации города
Муниципальное автономное учреждение
«Информационно-методический центр»
Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников на территории города Сургута
по ______________________
(ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДМЕТ)
____
«____» «____________» 20____ год

4.

Шахматная доска имеет размер $8 \times 8 = 64$ клетки.

Сначала рассмотрим ситуацию, когда белый король уже стоит, (при этом не на краю), а чёрный ещё нет.

Белый может стоять на одной из $6 \cdot 6 = 36$ клеток, стоя не на краю. Чёрный тогда может встать на любую из 64 клеток, кроме тех, что рядом с белым. Получается $64 - \underline{8} = 56$, M-8-2

Теперь допустим, что белый стоит с края, но не на углу.

Получается 6·4=24, так как на каждом крае 6 неугловых клеток, а краёв 4.

У чёрного тогда 64−5 =59 вариантов встать

Всего 24·59 вариантов

56 Теперь белый стоит на углу. У него 4 варианта, а у чёрного − 64−3 = 61 вариант.

Всего 4·61 вариантов.

В итоге получается 56·36+4·61+

+24·59=2016+244+1416=3676 вариантов

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 36 \\ \hline 336 \\ +\ 168\ \ \\ \hline 2016 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \times\ 61 \\ \hline 244 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 59 \\ \hline 216 \\ +\ 120\ \ \\ \hline 1416 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2016 \\ +\ 1416 \\ 244 \\ \hline 3676 \end{array}$$

М-8-23

Ответ: всего есть 3676 вариантов.

3.

Попробуем доказать от обратного.
Допустим, три грибника, что собрали больше всех грибов, собрали вместе 49 - максимально много, сколько можно, чтобы опровергнуть утверждение задачи.
Обозначим грибников буквами. Тогда:

$a+b+c+d+e+f+g=100$; $m+n=100$

$a+b+c=49$

$a>b>c>d>e>f>g$

$a+b+c=n$

$d+e+f+g=m$

чить максимальную свободу в выбо[...]
числа для d, e, f и g, нужно сдела[...]
с максимально большими. Для
этого нужно взять максимально
близкие друг к другу значения
a, b и c. Если мы попытаемся
сделать $c > \frac{49}{3}$, то a или b станут
меньше c, что противоречит ранее
приведённому утверждению.
Итак, это значения $a = 18; b = 16; c = 15$
$n = a + b + c = 49$
$m = 100 - n = 51$
$15 > d > e > f > g$
Максимально возможные значения
для d, e, f и g — $11; 12; 13; 14$.
$11 + 12 + 13 + 14 = 50 < 51$.
Таким образом, выходит, что даже
если подобрать максимально возмож[...]
ные значения [...]

М-8-23

они были в сумме
меньше 50, и мак-
симально возмож-
ные значения
для d, e, f и g,
не получается в сумме достичь 100,
только $99 = 11+12+13+14+15+16+18$. И эта
проблема решается, если сделать
$a+b+c \geq 50$, то есть соответствую-
щими условию задача. 7б

Ч.Т.Д.

5.

Сначала разобьём тома на 4 пары по
два: 1) |□□|□□|□□|□□|. Тогда мы
можем взять каждую пару, и либо
переставить в ней тома, либо
нет (2 варианта). Получается $2^4 = 16$
вариантов.

М. - 8

Также возможен другой вариан

разбиения:

2.) |□□|□□|□|□□|□| a + в

3.) |□|□□|□□|□□|□| в + в

4.) |□|□□|□|□□|□□| в + a

Как видно, эти схемы разбиени

составляются из двух сегмен

каждый из которых может быт

a: |□□|□□| или в: □|□□|□ и эти

сегменты отражают все возмож

ные действия - поменять места

или оставить центральные точ

или же крайние.

35 ~~Итого~~ В результате полу-

чается $2^3 = 8$ вар. для 2.) $2^3 = 8$ вар.

для 3.) и $2^3 = 8$ вар. для 4.).

В сумме $16 + 8 + 8 + 8 = 40$ вариантов.

Ответ: ...